Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych – Nauki Fizyczne
Egzamin pisemny

W rozwiązaniach przedstaw tok rozumowania prowadzący do wyniku.
Końcowe wyniki obliczeń zapisz z dokładnością 3 lub 2 cyfr znaczących, po odpowiednim zaokrągleniu, np. $1{,}23456 \cdot 10^{-19} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-19}$ lub $1,2 \cdot 10^{-19}$.

Wartości wybranych stałych

prędkość światła w próżni	$c \approx 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
ładunek elementarny	$e \approx 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
stała Coulomba	$k_e \approx 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$
stała Plancka	$h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV s
zredukowana stała Plancka	$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 6{,}58 \cdot 10^{-16}$ eV s
stała grawitacji	$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
stała Avogadra	$N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
stała gazowa	$R \approx 8{,}31$ J/(K·mol)
stała Boltzmanna	$k_B \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K $\approx 8{,}62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
stała Rydberga	$R_\infty \approx 1{,}10 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$
rydberg	$Ry \approx 13{,}6$ eV
masa elektronu	$m_e \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg≈ 511 keV$/c^2$
masa protonu	$m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg ≈ 938 MeV$/c^2$
jednostka masy atomowej	$u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ≈ 931 MeV$/c^2$

Zadania 1–7 to zadania łatwiejsze.

Oddaj (prześlij) rozwiązania tylko <u>czterech</u> z tych zadań!

Za każde z tych czterech rozwiązań możesz zdobyć 6 punktów.

Zadania 8-12 to zadania trudniejsze.

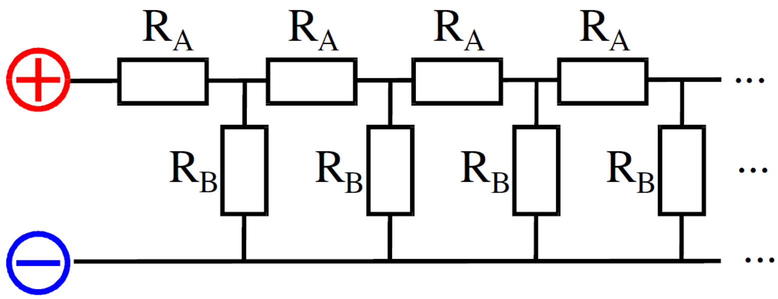
Oddaj (prześlij) rozwiązania tylko <u>dwóch</u> z tych zadań!

Za każde z tych dwóch rozwiązań możesz zdobyć 8 punktów.

Zadania łatwiejsze

Zadanie 1. Oporniki

Obwód przedstawiony na rysunku składa się z nieskończonej liczby oporników R_A i R_B. Wyznacz opór zastępczy R tego obwodu.



Zadanie 1. Nieskończony obwód oporników.

Zadanie 2. Spadanie Ziemi

Ile wynosiłby czas T „spadania” Ziemi na Słońce, gdyby nagle zatrzymany został jej ruch orbitalny? Rok trwa $T_0 \approx 3{,}156 \cdot 10^7$ s.

Zadanie 3. Pęd fotonu i pęd elektronu

Ile wynosi stosunek wartości p_f, pędu fotonu o energii $E = 1{,}17$ eV do wartości p_e, pędu elektronu o energii kinetycznej równej E?
Masa spoczynkowa elektronu wynosi $m_e = 511$ keV$/c^2$.

Zadanie 4. Wiązka światła przechodząca przez polaryzatory

Badano przechodzenie niespolaryzowanej wiązki światła przez polaryzatory liniowe. Natężenie wiązki wynosiło I_0 (w jednostkach W/m^2). Wszystkie polaryzatory były identyczne i zawsze były ustawiane prostopadle do biegu wiązki.

a) Najpierw w wiązkę wstawiono tylko jeden z polaryzatorów. Natężenie światła za tym polaryzatorem wynosiło $(46 \pm 1)\%$ natężenia początkowego. Wymień co najmniej dwa zjawiska, które mogły spowodować odchylenie stosunku natężeń od 50%.

b) Następnie za pierwszym polaryzatorem wstawiono drugi. Płaszczyzny polaryzacji obu polaryzatorów były równoległe. Natężenie światła przechodzącego przez drugi polaryzator stanowiło $(94 \pm 1)\%$ natężenia światła padającego na ten polaryzator. Czy ten wynik nie jest sprzeczny z wynikiem opisanym w punkcie (a)? Odpowiedź uzasadnij przeprowadzając odpowiednie obliczenia.

c) Napisz wzór pozwalający obliczyć natężenie światła po przejściu wiązki kolejno przez N takich polaryzatorów, jeśli płaszczyzna polaryzacji każdego kolejnego polaryzatora obrócona jest o kąt α w stosunku do płaszczyzny polaryzacji poprzedniego. Uwzględnij parametr opisujący efekt obserwowany w punktach (a) i (b).

Zadanie 5. Aktywność próbki

Ile wynosi aktywność próbki ^{210}Po (emitera cząstek α), której masa wynosi 1μg?
Czas połowicznego rozpadu ^{210}Po wynosi około 138 dni.

Wskazówka: Aktywnością promieniotwórczą próbki nazywamy liczbę rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu.

Zadanie 6. Energie własne

Pewien układ kwantowy opisywany jest przez następujący hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a} + i\hat{b})(\hat{a}^\dagger - i\hat{b}^\dagger),$$

gdzie ω ma wymiar częstości, zaś $\hat{a}$ i $\hat{b}$ to operatory anihilacji opisujące dwa niezależne stopnie swobody. Znajdź energie własne tego układu wiedząc, że zachodzą następujące związki komutacyjne:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger], \quad [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = 0 = [\hat{a}, \hat{b}].$$

Ponadto, n-ty stan własny operatora liczby wzbudzeń, $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, w układzie a spełnia

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n_a, n_b\rangle = n_a|n_a, n_b\rangle, \quad \hat{a}|n_a, n_b\rangle = \sqrt{n_a}|n_a - 1, n_b\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n_a, n_b\rangle = \sqrt{n_a + 1}|n_a + 1, n_b\rangle$$

i analogicznie dla układu b:

$$\hat{b}^\dagger\hat{b}|n_a, n_b\rangle = n_b|n_a, n_b\rangle, \quad \hat{b}|n_a, n_b\rangle = \sqrt{n_b}|n_a, n_b - 1\rangle, \quad \hat{b}^\dagger|n_a, n_b\rangle = \sqrt{n_b + 1}|n_a, n_b + 1\rangle$$

Zadanie 7. Rozkład Poissona

Stwierdzono, że podczas dyżuru lekarz jest wzywany średnio do 3 przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dyżur upłynie lekarzowi bez wezwania. Przyjmij, że liczba wezwań podczas dyżuru podlega rozkładowi Poissona.
Wskazówka: rozkład Poissona o parametrze $\lambda > 0$ jest dyskretnym rozkładem pradopodoboeństwa:

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Zadania trudniejsze

Zadanie 8. Rowerzysta w poprzecznym wietrze

Rowerzysta jedzie z prędkością $v = 8$ m/s wzdłuż prostej, poziomej drogi. Las rosnący po obu stronach drogi osłania ją od wiatru. Poza lasem, prostopadle do drogi, wiatr wieje z prędkością $u = 6$ m/s. Ile razy większą mocą rowerzysta musi napędzać rower, jeśli chce utrzymać stałą prędkość jazdy po wyjechaniu spod osłony lasu.
Wskazówka: siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości poruszającego się względem niego ciała. Przyjmij, że wartość tej siły nie zależy od kierunku ruchu ciała względem powietrza.

Zadanie 9 Lód z przechłodzonej wody

Woda pozbawiona zanieczyszczeń i pozostawiona bez wstrząsów mechanicznych może zostać ochłodzona do temperatury $T_H \approx 225$ K (–48 °C) i pozostać w stanie ciekłym (tzw. stan przechłodzenia). W temepraturze $T \leq T_H$, w ciekłej wodzie powstają i szybko rosną kryształki lodu. Podobne zjawisko zachodzi, gdy przechłodzoną wodę w temperaturze $T > T_H$ wstrząśniemy, np. wyjmując z zamrażalnika. Jaka masa, m_l, lodu powstanie w butelce zawierającej $m = 0,5$ kg wody przechłodzonej w zamrażalniku? Temperatura w zamrażalniku, $T_0 = 263,15$ K (–10 °C). Dane dla wody: temperatura topnienia, $T_m = 273,15$ K, ciepło topnienia, $L = 333,6$ J/g, ciepło właściwe przechłodzonej wody, $c_w = 4,2$ J/(g·K), ciepło właściwe lodu, $c_l = 2,1$ J/(g·K). Tworzenie i wzrost kryszałów lodu są na tyle szybkie, że można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem (przez ścianki butelki).

Zadanie 10. Szacowanie masy neutrina

Neutrina są cząstkami elementarnymi o bardzo małej masie spoczynkowej i bardzo słabo oddziałującymi z materią, co powoduje, że bardzo trudno je badać. 23 lutego 1987 roku w detektorze Kamiokande zarejestrowano „błysk” neutrin trwający $\Delta t \approx 2$ s, a energie zarejestrowanych neutrin mieściły się w zakresie od ok. 8 MeV do ok. 40 MeV. Przyjęto, że zostały one wyemitowane podczas wybuchu supernowej SN1987A odległej od Ziemi o $L \approx 170\,000$ lat świetlnych. Przyjmij, że wszystkie obserwowane neutrina były neutrinami tego samego rodzaju (elektronowymi) i wyemitowane zostały jednocześnie i na tej podstawie oszacuj ich masę spoczynkową m_ν. Rok trwa $T_0 \approx 3{,}156 \cdot 10^7$ s.

Zadanie 11. Absorbancja

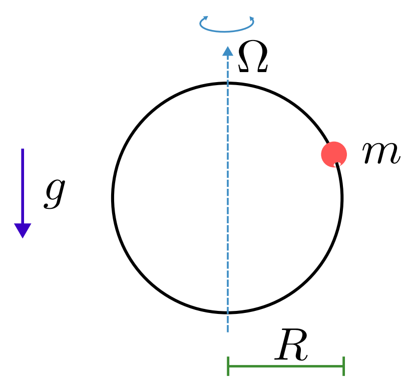
Zmierzono widmo absorpcyjne roztworu zawierającego białko i nukleozyd, umieszczając roztwór w kuwecie kwarcowej o drodze optycznej $l = 0,5$ cm. Absorbancja przy długości fali 280 nm i 260 nm wynosiła odpowiednio $A_{280nm} = 0{,}72$ i $A_{260nm} = 0{,}68$, a tło widma jest na poziomie $A_{\lambda>340nm} = 0{,}02$. Następnie roztwór mieszaniny dwukrotnie rozcieńczono tym samym rozpuszczalnikiem, w jakim był sporządzony pierwszy roztwór, i ponownie zarejestrowano widmo w tej samej kuwecie. Tym razem dla długości fali 280 nm i 260 nm absorbancja wynosiła odpowiednio $A_{280nm} = 0{,}37$ i $A_{260nm} = 0{,}35$, a tło nie zmieniło się.

Wyznacz stężenie każdego ze składników mieszaniny znajdującej się w roztworze, wiedząc, że w warunkach pomiaru dziesiętne molowe współczynniki absorpcji dla długości fali 260 nm i 280 nm wynoszą: $\varepsilon_{260nm}^{bialko} = 12\,000$ M^{-1}cm^{-1} dla białka i $\varepsilon_{260nm}^{nukleozyd} = 14\,000$ M^{-1}cm^{-1} dla nukleozydu oraz $\varepsilon_{280nm}^{bialko} = 35\,000$ M^{-1}cm^{-1} dla białka, a nukleozyd w tej długości fali nie absorbuje. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12. Wirujący pierścień

Punkt materialny o masie m może poruszać się po gładkim okręgu o promieniu R obracającym się ze stałą prędkością Ω wokół pionowej osi przechodzącej przez środek okręgu (patrz rysunek). Układ znajduje się w zewnętrznym, jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g.

Wyznacz położenia równowagi punktu materialnego m i zbadaj ich trwałość. Następnie wyznacz częstość małych drgań punktu materialnego m wokół położenia równowagi trwałej.



Zadanie 12. Wirujący pierścień