Warszawska Szkoła Doktorska Matematyki i Informatyki

Egzamin wstępny, 12 lipca 2021

Na kolejnych stronach znajduje się 16 zadań dotyczących różnych obszarów matematyki i informatyki. Należy wybrać i rozwiązać dowolne 4 z nich. Każde zadanie jest warte tyle samo punktów.

Zadania można wybierać dowolnie, tj. kandydaci na studia w dyscyplinie matematyka mogą rozwiązywać także zadania "informatyczne" i na odwrót.

Każde zadanie składa się z kilku podzadań o porównywalnej wielkości, jednak każde zadanie (tj. wszystkie jego podpunkty) jest punktowane jako całość.

Możesz spróbować rozwiązać więcej niż 4 zadania. Wszystkie te rozwiązania będą ocenione, jednak tylko 4 najlepiej ocenione zadania wejdą w skład Twojej ogólnej oceny.

Wszystkie odpowiedzi należy odpowiednio uzasadnić.

Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce podpisanej imieniem i nazwiskiem i oznaczonej numerem zadania.

Powodzenia!

1. **Analiza**

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

(i) Wyznaczyć jawny wzór funkcji f, bez nieskończonej sumy.

(ii) Czy szereg jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$? Czy jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$? Czy jest zbieżny niemal jednostajnie na $(0, +\infty)$?

(iii) Rozważmy przestrzeń z miarą $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$, gdzie $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}_+$, a miary $\mu, \delta_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to [0, \infty)$ przyjmują postać

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\delta_n(A), \qquad \text{gdzie} \qquad \delta_n(A) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in A \\ 0 & \text{dla } n \notin A \end{cases},$$

dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ i liczby natralnej $n > 0$. Obliczyć

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^2}{(1+x^2)^{t+1}}\,\mu(dt).$$

(iv) Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

Czy ten szereg jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

2. **Algebra liniowa**

1. Dla przekształcenia liniowego pomiędzy przestrzeniami liniowymi $f : V \to W$ niech $im(f)$ oznacza obraz f. W przestrzeni endomorfizów liniowych $End(\mathbb{R}^3)$ rozważmy podzbiór

$$\Sigma_2(\mathbb{R}^3) = \{f \in End(\mathbb{R}^3) \mid \dim im(f) = 2\}.$$

(i) Uzasadnić, że dla dowolnych $f, g \in \Sigma_2(\mathbb{R}^3)$ mamy $1 \leq \dim im(f \circ g) \leq 2$.

(ii) Wskazać przykłady endomorfizmów $f_i, g_i \in \Sigma_2(\mathbb{R}^3)$ dla $i = 1, 2$, takich, że

$$\dim im(f_i \circ g_i) = i\,.$$

(iii) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. Dla liczby naturalnej k definiujemy podzbiór zbioru endomorfizmów

$$\Sigma_k(V) = \{f \in End(V) \mid \dim im(f) = k\}\,.$$

Dla ustalonych liczb naturalnych $0 \leq k \leq \ell \leq \dim V$ znaleźć zbiór

$$\{m \in \mathbb{N} \mid \exists f \in \Sigma_k(V)\,,\ \exists g \in \Sigma_\ell(V)\,,\ f \circ g \in \Sigma_\ell(V)\} \subset \mathbb{N}\,.$$

(iv) Czy odpowiedź w punkcie (iii) jest zależna od własności ciała (np. charakterystyki)?

3. **Algebra**

Niech $\mathbb{R}$ oznacza ciało liczb rzeczywistych oraz niech $I = (x^2 + x + 1)$ będzie ideałem pierścienia wielomianów $\mathbb{R}[x]$.

(i) Uzasadnić, że pierścień ilorazowy $\mathbb{R}[x]/I$ jest ciałem.

(ii) Przedstawić element $(x^4 + x^3 - 2x + 1) + I$ w postaci $a + bx + I$, $a, b \in \mathbb{R}$. Znaleźć odwrotność tego elementu.

(iii) Czy pierścień $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + x + 1)$ jest ciałem?

(iv) Jeśli odpowiedź w (iii) jest negatywna, to wskazać dowolną liczbę pierwszą p (o ile taka istnieje), dla której pierścień

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^2 + x + 1)$$

jest ciałem.

4. **Równania różniczkowe zwyczajne**

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne postaci

$$ax'' + b(x,t)x' + c(x,t) = 0, \tag{1}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ natomiast $b, c : \Omega \to \mathbb{R}$, dla otwartego zbioru $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

(i) Podać rozwiązanie zagadnienia (1) w przypadku

$$a = 0, \quad b(x,t) = t, \quad c(x,t) = -x \ln\left(\frac{x}{t}\right),$$

z warunkiem początkowym $x(1) = 1$.

(ii) Niech $a \neq 0$. Podać możliwie ogólne założenia dotyczące funkcji b i c, przy których zagadnienie (1) posiada jednoznaczne rozwiązanie z warunkami początkowymi $x(0) = A$ i $x'(0) = B$.

(iii) Podać przykład zagadnienia (1), dla którego przynajmniej jednego rozwiązania nie można przedłużyć na cały zbiór $\mathbb{R}_+$. Wyjaśnić swój wybór.

(iv) Zbadać stabilność rozwiązania stacjonarnego dla równania (1) postaci

$$a = 1; \quad b(x,t) = b,\ b > 0; \quad c(x,t) = cx^3,\ c > 0.$$

5. **Topologia**

Niech X i Y będą topologicznymi przestrzeniami Hausdorffa.

(i) Niech $A \subset Y$ będzie podzbiorem zwartym. Wykazać, że przestrzeń ilorazowa Y/A jest przestrzenią Hausdorffa.

(ii) Załóżmy, że przestrzenie X i Y są zwarte, $x_0 \in X$, zaś $A \subset Y$ jest niepustym podzbiorem domkniętym. Wykazać, że jeśli podprzestrzenie $X \setminus \{x_0\}$ i $Y \setminus A$ są homeomorficzne, to przestrzeń X jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową Y/A.

(iii) Wskazać kontrprzykład do powyższego stwierdzenia z odrzuconym założeniem o zwartości X bądź Y.

(iv) Niech D^2 będzie jednostkowym dyskiem w $\mathbb{R}^2$, a S^1 jego brzegiem. Udowodnić, że przestrzeń ilorazowa D^2/S^1 jest homeomorficzna ze sferą S^2.

6. **Prawdopodobieństwo**

(i) Rzucamy 3 razy symetryczną monetą. Wiemy, że wypadła nieparzysta liczba orłów. Jaka jest szansa, że wypadły 3 orły?

(ii) Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jaka jest najmniejsza liczba rzutów n, tak, aby szansa, że wypadł orzeł przynajmniej jeden raz była większa niż $0,999$?

(iii) Losujemy punkty płaszczyzny. Wylosowany punkt jest zmienną losową o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym o wektorze wartości oczekiwanej równemu $(0, 0)$ oraz macierzy kowariancji $\Sigma = Diag(1, 1)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej oraz obliczyć średnią odległość wylosowanego punktu od początku układu współrzędnych.

(iv) Niech (X, Y) będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na

$$\Omega := \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego X pod warunkiem $Y = y$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem $Y = y$.

7. **Funkcje Analityczne**

Przyjmijmy $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$. Dla $z \in \mathbb{C}$ niech $\mathrm{Re}(z)$ oznacza część rzeczywistą. Niech $Log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ będzie gałęzią główną logarytmu.

(i) Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z) = (z-1)\mathrm{Re}(Log\, z)$.

(ii) Wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f spełnia równania Cauchy-Riemanna.

(iii) Sprawdzić, że $g(z) = z(Log\, z - 1)$ jest funkcją pierwotną dla $Log\, z$ i znaleźć całkę $\int_\gamma Log\, z\, dz$, gdzie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ jest krzywą zadaną wzorem $\gamma(t) = t - i(1-t)$.

(iv) Znaleźć całkę $\int_\gamma \overline{Log\, z}\, dz$, gdzie γ jest krzywą zdefiniowaną w (iii).

8. **Analiza funkcjonalna**

Niech $\ell^p := \{x = (x_1, x_2, ...) : \|x\|_p := (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} < \infty\}$ będzie przestrzenią ciągów z normą $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$.

(i) Pokazać, że kula $B := \{x \in \ell^3 : \|x\|_3 \leq 1\}$ nie jest zwarta.

(ii) Udowodnić, że dla $x \in \ell^{3/2}$ oraz $y \in B$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \|x\|_{3/2}.$$

(iii) Niech $A(x) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n, ...)$. Pokazać, że $A : \ell^2 \to \ell^2$ jest operatorem liniowym, ograniczonym i zwartym.

(iv) Niech $T : \ell^2 \to \ell^2$ będzie samosprzężonym operatorem (liniowym i ograniczonym) określonym dodatnio (ang. positive definite), tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\langle Tx, x\rangle \geq c\|x\|_2^2 \quad \text{dla każdego } x \in \ell^2,$$

gdzie $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ dla $x, y \in \ell^2$. Udowodnić, że dla dowolnego $y \in \ell^2$ oraz liczby $\lambda > -c$ istnieje dokładnie jeden $x \in \ell^2$ taki, że $T(x) + \lambda x = y$. Pokaż, że każda wartość własna operatora T jest większa lub równa c. Znajdź przykład niezerowego operatora samosprzężonego $T : \ell^2 \to \ell^2$, który nie ma niezerowych wartości własnych.

9. **Języki programowania**

   (a) Następujący program w języku C:

   ```
   #include <stdio.h>
   #define SUM(a,b) a+b
   int main()
   {
       int x = 2; int y = 3;
       printf("%d",SUM(x,y)*5);
       return 0;
   }
   ```

   nie wypisuje liczby 25, tylko pewną inną liczbę. Jaka to liczba? Dlaczego tak się dzieje?

   (b) Opisz zbiór tych par początkowych wartości zmiennych całkowitoliczbowych `x` i `y`, dla których poniższa pętla w języku C się zatrzymuje:

   ```
   while (x>y) y+=(--x)
   ```

   Możesz założyć, że zmienne mogą przyjmować dowolne wartości całkowite.

   (c) Podaj typy funkcji `f` i `g` zdefiniowanych w następującym ciągu deklaracji w języku OCaml:

   ```
   let x:int = 5
   let f y = y + x
   let g z = z f + x
   ```

   (d) W języku Haskell, załóżmy że mamy daną funkcję

   ```
   plus :: [Int] -> [Int] -> [Int]
   ```

   która dodaje do siebie odpowiadające sobie elementy dwóch list liczb całkowitych, na przykład:

   ```
   plus [1,2,3] [4,5,6] = [5,7,9].
   ```

   Podaj dziesięć pierwszych elementów listy `s` zdefiniowanej wyrażeniem:

   ```
   let s = 0:1:(plus s (tail s))
   ```

   Co to za ciąg liczb?

10. **Matematyka dyskretna**

   W tym zadaniu rozważamy liczby całkowite nieujemne w zapisie dziesiętnym (bez zer wiodących). Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą.

   (a) Ile jest liczb n-cyfrowych, których iloczyn cyfr jest podzielny przez 10?

(b) Ile jest liczb n-cyfrowych, których iloczyn cyfr daje resztę 3 z dzielenia przez 5?

(c) Ile jest par liczb n-cyfrowych (a, b), takich że podczas dodawania pisemnego liczb a i b nie następuje żadne przeniesienie?

(d) Ile jest liczb złożonych z co najwyżej n cyfr, które zawierają podciąg cyfr 1, 2?

We wszystkich punktach oczekiwany jest wzór jawny (zwarty) lub dokładny opis sposobu uzyskania takiego wzoru.

11. **Algorytmy i struktury danych**

Na wejściu dana jest tablica reprezentująca ciąg n liczb ze zbioru $\{-10, \ldots, 10\}$. Dla każdego z poniższych problemów zaproponuj algorytm o złożoności liniowej rozwiązujący ten problem.

(a) Dla podanej na wejściu liczby k, wybrać podciąg ciągu złożony z k elementów o największej sumie.

(b) Dla podanej na wejściu liczby parzystej k, wybrać podciąg ciągu złożony z k elementów o największym iloczynie.

(c) Sprawdzić, czy ciąg zawiera *spójny* podciąg o sumie równej 0.

(d) Sprawdzić, czy ciąg zawiera podciąg o sumie równej 0.

12. **Logika** Rozważamy logikę pierwszego rzędu tylko z równością, bez żadnych dodatkowych symboli relacyjnych ani funkcyjnych.

Podaj zbiory zdań o poniższych własnościach albo uzasadnij że takie zbiory nie istnieją:

(a) skończony zbiór zdań, który ma modele, ale tylko skończone;

(b) skończony zbiór zdań, który ma modele, ale tylko nieskończone;

(c) zbiór zdań, który ma dowolnie duże modele skończone, ale żadnych modeli nieskończonych;

(d) zbiór zdań, który ma model skończony o n elementach wtedy i tylko wtedy kiedy n jest liczbą pierwszą.

13. **Automaty i języki formalne**

Dla dowolnej grupy skończonej $\mathbf{G} = (G, \cdot, 1)$, zdefiniujmy funkcję $\Pi_{\mathbf{G}} : G^* \to G$ przed indukcję:

$$\Pi_{\mathbf{G}}(\epsilon) = 1 \qquad \Pi_{\mathbf{G}}(aw) = a \cdot \Pi_{\mathbf{G}}(w) \quad \text{dla } a \in G, w \in G^*,$$

oraz zdefiniujmy język:

$$L_{\mathbf{G}} = \{w \in G^* \colon \Pi_{\mathbf{G}}(w) = 1\}.$$

Uzasadnij następujące stwierdzenia:

(a) Dla dowolnej grupy skończonej $\mathbf{G}$, język $L_{\mathbf{G}}$ jest regularny.

(b) Dla dowolnej grupy skończonej $\mathbf{G}$, każdy deterministyczny automat skończony rozpoznający $L_{\mathbf{G}}$ ma co najmniej $|G|$ stanów.

(c) Dla dowolnej grupy skończonej $\mathbf{G}$, każdy *nie*deterministyczny automat skończony rozpoznający $L_{\mathbf{G}}$ ma co najmniej $|G|$ stanów.

(d) Niech $\mathbf{G} = \mathbf{S}_n$ będzie grupą wszystkich permutacji zbioru n-elementowego. Wtedy istnieje niedeterministyczny automat skończony o $\mathcal{O}(n^2)$ stanach, który rozpoznaje język $G^* - L_{\mathbf{G}}$.

14. **Złożoność obliczeniowa**

Dla języka $L \subseteq \Sigma^*$, zdefiniujmy:

$$L^{\exists} = \{v \in \Sigma^* \colon \exists w \in \Sigma^*(|w| = |v| \wedge vw \in L)\},$$
$${}^{\exists}L = \{v \in \Sigma^* \colon \exists w \in \Sigma^*(|w| = |v| \wedge wv \in L)\}.$$

Uzasadnij następujące stwierdzenia:

(a) Jeśli L jest w klasie **PTIME** to $L^{\exists}$ i ${}^{\exists}L$ są w klasie **NP**.

(b) Jeśli L jest w klasie **PSPACE** to $L^{\exists}$ i ${}^{\exists}L$ też są w klasie **PSPACE**.

(c) Istnieje język L w klasie **PTIME** taki że $L^{\exists}$ i ${}^{\exists}L$ są **NP**-zupełne.

(d) Istnieje **NP**-zupełny język L taki że $L^{\exists}$ i ${}^{\exists}L$ są w klasie **PTIME**.

15. **Programowanie współbieżne**

W architekturach z pamięcią dzieloną, w których wiele wątków może wykonywać operacje odczytu i zapisu zmiennych dzielonych, popularnym modelem spójności opisującym semantykę dostępu do takich zmiennych jest *spójność sekwencyjna* (ang. *sequential consistency*). Rozważmy następujący program, który składa się z trzech wątków, `t1`, `t2` oraz `t3`, wykonujących operacje odczytu i zapisu trzech zmiennych dzielonych, `x`, `y` i `z`.

```
int x = 0, y = 0, z = 0;
void t1() {              void t2() {              void t3() {
  x = 1;                   y = 1;                   z = 1;
  print(y);                print(x);                print(x);
  print(z);                print(z);                print(y);
}                        }                        }
```

Wszystkie wątki są aktywowane mniej więcej w tym samym czasie, a ich dostępy do zmiennych są spójne sekwencyjnie. Funkcja `print` wypisuje wartość swojego argumentu, a jej każdorazowe wykonanie jest atomowe, tj. między obliczeniem wartości argumentu a jej wypisaniem nie są wykonywane żadne operacje.

Mając dane te założenia, które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

(a) Ciąg znaków `001011` jest poprawnym wyjściem programu.

(b) Ciąg znaków `001101` jest poprawnym wyjściem programu.

(c) Ciąg znaków `110011` jest poprawnym wyjściem programu.

(d) Istnieje dokładnie jeden ciąg znaków, który rozpoczyna się od `000` i jest poprawnym wyjściem programu.

16. **Bioinformatyka**

Załóżmy, że nagroda za dopasowanie (match) ma wartość $\alpha > 0$, kara za spację (gap) to $\beta \geq 0$, a kara za niedopasowanie (mismatch) to $\gamma \geq 0$. Dla pary sekwencji MIMUWAAMIMUW oraz MIMUWCCMIMUW:

(a) wyznacz optymalną wartość globalnego uliniowienia w zależności od α, β i γ,

(b) scharakteryzuj możliwe optymalne uliniowienia globalne oraz podaj ich liczbę,

(c) jak w (a) i (b) dla uliniowień lokalnych, ale przy założeniu, że $\beta = \gamma$.