Warszawska Szkoła Doktorska Matematyki i Informatyki

Egzamin wstępny, 3 lipca 2020

Na kolejnych stronach znajduje się 16 zadań dotyczących różnych obszarów matematyki i informatyki. Należy wybrać i rozwiązać dowolne 4 z nich. Każde zadanie jest warte tyle samo punktów.

Zadania można wybierać dowolnie, tj. kandydaci na studia w dyscyplinie matematyka mogą rozwiązywać także zadania "informatyczne" i na odwrót.

Każde zadanie składa się z kilku podzadań o porównywalnej wielkości, jednak każde zadanie (tj. wszystkie jego podpunkty) jest punktowane jako całość.

Możesz spróbować rozwiązać więcej niż 4 zadania. Wszystkie te rozwiązania będą ocenione, jednak tylko 4 najlepiej ocenione zadania wejdą w skład Twojej ogólnej oceny.

Wszystkie odpowiedzi należy odpowiednio uzasadnić.

Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce podpisanej imieniem i nazwiskiem i oznaczonej numerem zadania.

Powodzenia!

1. **Algebra liniowa**

Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Rozważamy przestrzeń liniową $V = \mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Iloczyn skalarny wektorów $v, w \in V$ jest oznaczany przez $\langle v, w \rangle$. Niech $e_1,\ e_2, \dots e_n$ będzie standardową bazą. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} - e_i & \text{dla } i = 1, 2, \dots n-1 \\ e_1 - e_n & \text{dla } i = n\,. \end{cases}$$

Niech $\Delta = f^* \circ f$, gdzie f^* jest przekształceniem sprzężonym do f, tzn. dla $v, w \in V$ mamy $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$.

(a) Dla $n = 3$ znajdź bazę V składającą się z wektorów własnych Δ.

(b) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że istnieje przekształcenie liniowe $\pi : V \to V$ takie, że

$$\pi \circ \Delta = \Delta \circ \pi\,, \qquad \pi \circ \pi = \pi$$

oraz obraz π jest równy $ker(\Delta)$.

(c) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że wartości własne Δ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

(d) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że $ker(\Delta) = ker(f)$ i znajdź bazę $ker(\Delta)$.

2. **Algebra**

   Niech $G = A_4$ będzie grupą wszystkich permutacji parzystych zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (a) Wyznaczyć $|G|$.

   (b) Znaleźć podgrupę $H \subset G$, która jest nietrywialnym, właściwym dzielnikiem normalnym grupy G.

   (c) Niech $K \subset G$ będzie podgrupą rzędu 3. Dowieść, że K nie jest podgrupą normalną grupy G. Podać przykład takiej podgrupy.

   (d) Znaleźć minimalny układ generatorów grupy G.

3. **Topologia**

   Niech M będzie otwartą wstęgą Möbiusa, którą definiujemy jako przestrzeń ilorazową

$$M = [-10, 10] \times (-1, 1)/\sim,$$

   gdzie

$$(s,t) \sim (s',t') \quad \Leftrightarrow \quad \big((s = s' \ \wedge \ t = t') \ \vee \ (s = -10 \ \wedge \ s' = 10 \ \wedge \ t = -t')\big)\,.$$

   (a) Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Czy produkt

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}} M$$

   z topologią produktową (topologia Tichonowa) zawiera przeliczalny podzbiór gęsty?

   (b) Udowodnij, że M zawiera podprzestrzeń S, która jest homeomorficzna z okręgiem S^1 taką, że $M \setminus S$ jest przestrzenią spójną.

   (c) Oblicz grupę podstawową $\pi_1(M)$.

   (d) Niech $N = \{[(s,t)] \in M \ : \ |t| \geq \frac{1}{2}\}$. Rozważmy przestrzeń ilorazową $P = M/N$. Udowodnij, że dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in P$ istnieje homeomorfizm $\phi : P \to P$ taki, że $\phi(x) = y$.

4. **Prawdopodobieństwo**

   Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny

$$\mathbb{P}(X = x) = (1-p)p^x, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

   dla pewnego $0 < p < 1$.

   (a) Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X \geq 10$.

   (b) Wylicz prawdopodobieństwo, że X jest liczbą parzystą. Czy jest ono większe niż prawdopodobieństwo uzyskania liczby nieparzystej?

(c) Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$.

(d) Wylicz wartość oczekiwaną X pod warunkiem, że X jest liczbą parzystą. Czy jest ona większa niż bezwarunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}X$?

5. **Analiza**

Niech $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \left((x_1-1)^2 + x_2^2\right)\left((x_1+1)^2 + x_2^2\right) = 1\}$ i niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną.

(a) Czy f osiąga swoje globalne minimum i maksimum na Q? Odpowiedź uzasadnić.

(b) W jakich punktach $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in Q$ istnieją ciągła funkcja h zdefiniowana na otoczeniu N_1 punktu $\bar{x}_1$ i otoczenie N_2 punktu $\bar{x}_2$ takie, że $Q \cap (N_1 \times N_2) = \{(x_1, h(x_1)) : x_1 \in N_1\}$?
W których punktach każda taka funkcja h jest różniczkowalna?

(c) Opisać metodę mnożników Lagrange'a. Sformułować odpowiednie twierdzenie. W których punktach Q założenia twierdzenia są spełnione?

(d) Niech $f = x_1^2 - x_2^2$. Obliczyć minima i maksima f na Q (Uwaga: mnożniki Lagrange'a dają wynik dość szybko)

6. **Funkcje analityczne**

Niech $F(z) = \frac{1}{z^2+z+1} \in \mathbb{C}(z)$ będzie funkcją wymierną.

(a) Znaleźć bieguny $F(z)$ w dziedzinie zespolonej.

(b) Obliczyć wszystkie residua $F(z)$ w dziedzinie zespolonej.

(c) Niech $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$. Obliczyć $\int_\Gamma F(z)dz$, gdzie Γ ma standardową orientację.

(d) Obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ (gdzie traktujemy F jako funkcję rzeczywistą).

7. **Analiza funkcjonalna**

Niech $V = L_0^2([0,\pi])$ będzie przestrzenią funkcji całkowalnych w kwadracie na odcinku $[0,\pi]$ i niech V_0 będzie podprzestrzenią składającą się z funkcji o średniej równej 0. Operator $T : V_0 \to V$ jest zadany formułą $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(a) Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym. Znaleźć jego normę.

(b) Znaleźć izometrię $S : V \to V_0$ taką, że ST jest operatorem samosprzężonym.

(c) Czy istnieją ciągłe operatory $A : V_0 \to C([0,\pi])$ i $B : C([0,\pi]) \to V$ takie, że $T = BA$? Tu $C([0,\pi])$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na $[0,\pi]$ z normą supremum. Czy T jest operatorem zwartym?

(d) Ustalmy liczbę całkowitą $n > 0$. Niech $\rho(n)$ będzie równe infimum zbioru norm operatorów $R : V \to V_0$ takich, że RT is jest izometrią na pewnej n-wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V_0$, to znaczy

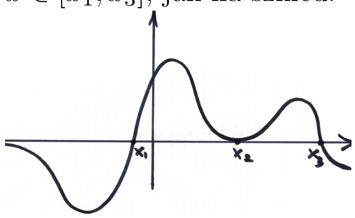
$$\rho(n) = \inf_{R\colon V \to V_0} \left\{ ||R|| \ :\ \exists W \subset V \quad \dim(W) = n, \quad \forall f \in W \quad |RT(f)| = |f| \right\}.$$

(tu $||\cdot||$ oznacza normę operatorową, a $|\cdot|$ oznacza normę L^2 w przestrzeni funkcji). Oblicz $\rho(n)$.

Wskazówka: W powyższych problemach zastosuj bazy ortogonalne składające się z funkcji $f_n(t) = \cos(nt)$ i $g_n(t) = \sin(nt)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

8. **Równania różniczkowe zwyczajne**

(a) Rozważmy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, różniczkowalną, ograniczoną, o ograniczonej pochodnej i dokładnie trzech punktach zerowych: $x_1 < x_2 < x_3$, przy czym $f(x) \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in [x_1, x_3]$, jak na szkicu.



Rozważyć równanie różniczowe zwyczajne

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ \text{z warunkiem początkowym } x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Jakie są równowagi (czyli punkty stacjonarne) i które z nich są stabilne w sensie Lapunowa?
Czy istnieje x_0 takie, że $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$?
Czy istnieje x_0 takie, że $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$?
Które z równowag mogą być $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ dla x nie będącego stałą?

(b) Sformułować twierdzenie Picarda-Lindelöffa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Czy stosuje się ono do Równania (1)?

(c) Rozważmy $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i równanie różniczkowe zwyczajne w $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b \\ \text{z warunkiem początkowym } x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $b \in \mathbb{R}^2$ jest stałym wektorem.

Bez jego rozwiązywania, znajdź równowagę i odpowiedz, jaki to rodzaj równowagi (zlew/węzeł stabilny, siodło, etc.)?

Wyliczyć wszystkie warunki początkowe x_0, dla których trajektoria x zbiega do równowagi.

(d) Rozważmy równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = Cx(t), \tag{3}$$

gdzie C jest macierzą rzeczywistą 2×2.

Niech y_1 i y_2 będą dwoma rozwiązaniami równania (3) takimi, że $y_1(0)$ i $y_2(0)$ są wektorami liniowo niezależnemi.

Zdefiniujmy macierz

$$M(t) = [y_1(t), y_2(t)]\,.$$

Rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{array}{r} \dot{x}(t) = Cx(t) + B(t) \\ \text{z warunkiem początkowym } x(0) = x_0, \end{array} \tag{4}$$

gdzie $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją ciągłą. Wyrazić rozwiązanie równania (4) używając $M(t)$, $B(t)$ i x_0.

9. **Języki programowania**

(a) Podaj typy funkcji `f` i `g` zdefiniowanych w następującym ciągu deklaracji w języku OCaml:

```
let x:int = 4
let f a b = a + b + x
let g = f 1
```

(b) Podaj najsłabszy warunek logiczny ϕ, który gwarantuje poprawność poniższego stwierdzenia w logice Hoare'a dla dowodzenia poprawności programów operujących na zmiennych całkowitoliczbowych (o składni zaczerpniętej z języka C):

$\{\phi\}$
```
if (x>y) z = x-y; else z = y-x;
```
$\{z = y\}$

(c) Podaj pierwszych 10 elementów listy `x`, zdefiniowanej w języku Haskell następująco:

```
let x = 0:1:(map (\n -> 1-n) x)
```

(d) Dla następujących klas w języku Java:

```
class A {
    void f() {g();h();}
    void g() {System.out.print("1");}
    void h() {System.out.print("2");}
}
class B extends A {
    void h() {System.out.print("3");}
}
```

jaki będzie efekt wykonania następujących instrukcji?

```
A a = new A(); A b1 = new B(); B b2 = new B();
a.f(); b1.f(); b2.f();
```

A jaki byłby efekt, gdyby wszystkie metody w obu klasach były zadeklarowane ze słowem kluczowym `static`? Odpowiedzi krótko uzasadnij.

10. **Matematyka dyskretna**

Dane jest $n \geq 0$ koralików.

Załóżmy najpierw, że każdy koralik ma inny kolor.

(a) Na ile sposobów można wybrać parzyście wiele koralików?

(b) Na ile sposobów można wybrać co najwyżej $n/2$ koralików?

Załóżmy teraz, że n jest podzielne przez 3, a i-ty koralik ma kolor $i \bmod 3$.

(c) Na ile sposobów można wybrać k koralików, przy czym $0 \leq k \leq n/3$?

(d) Ogólniej, na ile sposobów można wybrać k koralików, przy czym $0 \leq k \leq n$?

Dwa sposoby wyboru koralików uważamy za różne, jeśli liczby koralików poszczególnych kolorów w tych sposobach są różne. We wszystkich punktach oczekiwany jest wzór jawny (zwarty).

11. **Algorytmy i struktury danych**

Dane jest n liczb całkowitych dodatnich oznaczających masy cząsteczek. Dwie cząsteczki o tych samych masach mogą połączyć się w jedną, o masie będącej sumą ich mas. Zbiór cząsteczek nazywamy stabilnym, jeśli nie da się połączyć żadnych dwóch cząsteczek. Cząsteczki o tej samej masie uznajemy za nierozróżnialne. Zakładamy, że koszt operacji arytmetycznych jest $O(1)$.

(a) Udowodnij, że z każdego zbioru cząsteczek można otrzymać tylko jeden zbiór stabilny.

(b) Zaproponuj strukturę danych, która pozwala na dodawanie cząsteczek do początkowo pustego zbioru i po każdej takiej operacji podaje rozmiar zbioru stabilnego odpowiadającego aktualnemu zbiorowi cząsteczek. Zamortyzowany koszt operacji na strukturze w przypadku wykonania n operacji wstawienia powinien być $O(\log n)$.

(c) Zaproponuj (deterministyczny) algorytm liniowy, który dla danego zbioru cząsteczek wyznacza wynikowy zbiór stabilny w przypadku, gdy masy wszystkich cząsteczek są uporządkowane niemalejąco.

(d) Zaproponuj (deterministyczny) algorytm liniowy, który dla danego zbioru n cząsteczek wyznacza wynikowy zbiór stabilny w przypadku, gdy masy wszystkich cząsteczek są z zakresu $\{1, \ldots, n^2\}$.

12. **Logika**

Podaj zdania w logice pierwszego rzędu (z równością, nad wybraną przez siebie sygnaturą złożoną z symboli relacyjnych i/lub funkcyjnych) o poniższych własnościach, albo uzasadnij że takie zdania nie istnieją:

(a) zdanie, które ma modele, ale tylko dwuelementowe;

(b) zdanie, które ma dowolnie duże modele skończone, ale tylko o parzystym rozmiarze;

(c) zdanie, które ma modele, ale tylko nieskończone;

(d) zdanie, które ma dowolnie duże modele skończone, ale żadnych modeli nieskończonych.

13. **Automaty i języki formalne**

Rozważmy funkcję $\oplus : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ zdefiniowaną jak następuje:

$$0 \oplus 0 = 0 \qquad 1 \oplus 1 = 0 \qquad 1 \oplus 0 = 1 \qquad 0 \oplus 1 = 1$$

Rozszerzamy ją na słowa nad alfabetem $\{0,1\}$ tak, że dla dowolnych $u, w \in \{0,1\}^*$ oraz $a, b \in \{0,1\}$ zachodzi:

$$w \oplus \varepsilon = w \qquad \varepsilon \oplus w = w \qquad ua \oplus wb = (u \oplus w)(a \oplus b)$$

Dla przykładu $000000111 \oplus 1010 = 000001101$. Dodatkowo, dla dwóch języków K, L definiujemy $K \oplus L$ jako $\{k \oplus l \mid k \in K, l \in L\}$.

(a) Znajdź wszystkie takie języki $K \subseteq \{0,1\}^*$ że dla każdego $L \subseteq \{0,1\}^*$ zachodzi:

$$L = (L \oplus K) \oplus K$$

(b) Napisz wyrażenie regularne dla języka $0^* \oplus 1^* \oplus 1^* \oplus 1^*$.

(c) Udowodnij, że dla dowolnego języka regularnego R oraz słowa $w \in \{0,1\}^*$, język $R \oplus \{w\}$ jest regularny.

(d) Udowodnij, że język $L = \{1 \cdot 0^n \cdot 1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \oplus \{1 \cdot 0^{2m} \cdot 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nie jest bezkontekstowy.

14. **Złożoność obliczeniowa**

Niech $\overline{\phi}$ oznacza standardową reprezentację formuły rachunku zdaniowego ϕ jako słowa nad skończonym alfabetem $\Sigma = \{0, 1, \vee, \wedge, \neg, (,)\}$ gdzie zmienne zdaniowe są reprezentowane jako liczby w zapisie dwójkowym. Rozważmy język nad alfabetem $\Sigma \cup \{\$\}$:

$$L = \{\overline{\phi}\$\overline{\psi} : \phi \text{ i } \psi \text{ nie są równoważne}\}$$

Uzasadnij następujące stwierdzenia:

(a) L jest **NP**-zupełny;

(b) L przecięty z językiem takich słów, w których występuje co najwyżej 2020 różnych zmiennych zdaniowych, jest w klasie **PTIME**;

(c) L przecięty z językiem takich słów, w których nie występuje ani negacja ($\neg$) ani koniunkcja ($\wedge$), jest w klasie **LOGSPACE**;

(d) jeżeli dopełnienie języka L jest w klasie **NP**, to **NP**=**coNP**.

15. **Systemy komputerowe**

Rozważmy system ze stronicowaniem pamięci, w którym rozmiar strony wynosi 4096B, pozycja w tablicy stron (adres) ma 8B, a strona w tablicy stron dowolnego poziomu także zajmuje 4096B.

(a) Czy stronicowanie umożliwia zmapowanie adresów wirtualnych 65539 i 131331 na ten sam adres fizyczny?

(b) Czy stronicowanie umożliwia zmapowanie adresu wirtualnego 65539 na dwa różne adresy fizyczne 65539 i 135171 (niekoniecznie w tym samym procesie)?

(c) Ile poziomów stronicowania musi zapewnić mechanizm adresacji, aby możliwe było zarządzanie pamięcią o rozmiarze 1MB?

(d) Ile poziomów stronicowania musi zapewnić ten mechanizm, aby możliwe było zarządzanie pamięcią o rozmiarze 1GB?

Odpowiedzi uzasadnij.

16. **Programowanie współbieżne**

W architekturach z pamięcią dzieloną, w których wiele wątków może wykonywać operacje odczytu i zapisu zmiennych dzielonych, popularnym modelem spójności opisującym semantykę dostępu do takich zmiennych jest *spójność sekwencyjna* (ang. *sequential consistency*). Rozważmy następujący program, który składa się z trzech wątków, `t1`, `t2` oraz `t3`, wykonujących operacje odczytu i zapisu trzech zmiennych dzielonych, `x`, `y` i `z`.

```
int x = 0, y = 0, z = 0;
void t1() {                 void t2() {                 void t3() {
  int a = y + 1;              int b = z + 1;              int c = x + 1;
  x = a;                      y = b;                      z = c;
  printf("%d%d",y%2,z%2);     printf("%d%d",z%2,x%2);     printf("%d%d",x%2,y%2);
}                           }                           }
```

Wszystkie wątki są aktywowane mniej więcej w tym samym czasie, ich dostępy do zmiennych są spójne sekwencyjnie, parametry wywołania funkcji `printf` są wyliczane od ostatniego (prawego) do pierwszego (lewego), znaki wypisywane przez pojedyncze wywołanie funkcji `printf` pojawiają się w strumieniu wyjściowym jako ciągły napis a poza znakami wypisywanymi przez wywołania funkcji `printf` w powyższych trzech wątkach, program nie wypisuje żadnych innych znaków do tego strumienia. Mając dane te założenia, które z następujących stwierdzeń są prawdziwe.

(a) Ciąg znaków `001110` jest poprawnym wyjściem programu.

(b) Ciąg znaków `111101` jest poprawnym wyjściem programu.

(c) Warunek `0 <= x <= 2` jest niezmiennikiem programu.

(d) Warunek `0 <= x + y + z <= 6` jest niezmiennikiem programu.

Uzasadnij swoje odpowiedzi. Dokładniej, dla każdego punktu (a) – (d) Twoja odpowiedź musi zaczynać się od pojedynczego słowa – „TAK” albo „NIE” – po którym następuje uzasadnienie tej konkretnej odpowiedzi.