

**Zakres egzaminu w ramach rekrutacji
do Szkoły Doktorskiej Nauk Ścisłych i Przyrodniczych UW
w dyscyplinie matematyka**

Format egzaminu: 8 zadań z dyscypliny matematyka w puli 16 zadań proponowanych wspólnie z dyscypliną informatyka. Do ostatecznego wyniku kandydata liczą się 4 najlepiej ocenione zadania spośród 16 proponowanych zadań.

Poniższa lista zagadnień stanowi jedynie wskazówkę; zadania egzaminacyjne mogą częściowo dotyczyć także innych zagadnień, z zachowaniem ogólnej tematyki.

1. Analiza matematyczna – funkcje jednej zmiennej

Przykładowe zagadnienia: liczby rzeczywiste oraz zespolone i ich własności, ciągi i ich granice, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, warunek Cauchy'ego, kryteria istnienia granicy, szeregi liczbowe rzeczywiste i zespolone, kryteria zbieżności szeregów, szeregi warunkowo i bezwzględnie zbieżne, mnożenie szeregów, ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji, własności funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym, własność Darboux, rachunek różniczkowy funkcji rzeczywistych jednej zmiennej, twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a, badanie przebiegu funkcji, szeregi funkcyjne, zbieżność punktowa i jednostajna, szeregi potęgowe, promień i koło zbieżności, rozwinięcie Taylora, całka nieoznaczona, całka Riemanna, całki niewłaściwe.

2. Analiza matematyczna – funkcje wielu zmiennych

Przykładowe zagadnienia: pochodne cząstkowe i pochodna kierunkowa, gradient. Jakobian, ekstrema funkcji wielu zmiennych, funkcje uwikłane, mnożniki Lagrange'a, teoria miary i całki Lebesgue'a, przechodzenie do granicy pod znakiem całki, twierdzenie Fubiniego, całki krzywoliniowe i powierzchniowe, rozmaitości i formy różniczkowe.

3. Funkcje analityczne

Przykładowe zagadnienia: Funkcje analityczne, równania Cauchy-Riemanna, wzór całkowy Cauchy'ego, zasada maximum, residua.

4. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Przykładowe zagadnienia: prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność, zmienne losowe i ich parametry, warunkowa wartość oczekiwana, łańcuchy Markowa, rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych, prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne. Elementy statystyki: estymatory i ich własności, testowanie hipotez, regresja liniowa.

5. Geometria i algebra liniowa

Przykładowe zagadnienia: wyznaczniki i równania liniowe, przestrzenie liniowe i afiniczne, przekształcenia liniowe, wartości własne i wektory własne, twierdzenie Jordana, formy dwuliniowe i kwadratowe, iloczyny skalarne, kryterium Sylwestera.

6. Algebra

Przykładowe zagadnienia: grupy, grupy cykliczne, grupy permutacji, homomorfizmy grup, jądro, dzielnik normalny i grupa ilorazowa, twierdzenie Lagrange'a o rzędzie, podgrupy, pierścienie przemienne, ideał, ideały maksymalne i pierwsze, homomorfizmy pierścieni, dzielniki zera, elementy odwracalne, ciało ułamków, ciała, ciało proste, charakterystyka ciała, ciało algebraicznie domknięte, zasadnicze twierdzenie algebry, pierwiastki z jedności.

7. Topologia

Przykładowe zagadnienia: przestrzenie metryczne i topologiczne, sposoby wprowadzania topologii, twierdzenie Tichonova, przekształcenia ciągłe, twierdzenie Tietzego, przestrzenie spójne, przestrzenie zwarte, przestrzenie zupełne, zbiór Cantora i jego własności, twierdzenie Baire'a, twierdzenia Banacha i Brouwera o punkcie stałym, grupa podstawowa, zwarte powierzchnie.

8. Równania różniczkowe zwyczajne

Przykładowe zagadnienia: istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych jednej zmiennej rzeczywistej, równania i układy równań liniowych o stałych współczynnikach i ich rozwiązywanie, układy równań liniowych o zmiennych współczynnikach i macierz fundamentalna, stabilność rozwiązań.

9. Analiza funkcjonalna

Przykładowe zagadnienia: przestrzeń Banacha, funkcjonały i operatory liniowe, przestrzeń sprzężona, przestrzeń Hilberta, przestrzenie funkcyjne L^p , przestrzenie funkcji ciągłych.