WARSZAWSKA SZKOŁA DOKTORSKA MATEMATYKI I INFORMATYKI

2 lipca 2024

Egzamin kwalifikacyjny

Na kolejnych stronach znajduje się 16 zadań dotyczących różnych obszarów matematyki i informatyki. Należy wybrać i rozwiązać **dowolne 4 z nich**. Każde zadanie jest warte tyle samo punktów.

Zadania można wybierać dowolnie, tj. kandydaci na studia w dyscyplinie matematyka mogą rozwiązywać także zadania "informatyczne" i na odwrót.

Większość zadań składa się z kilku podzadań, jednak każde zadanie, tj. wszystkie jego podpunkty, punktowane jest jako całość.

Możesz spróbować rozwiązać więcej niż 4 zadania. Wszystkie te rozwiązania będą ocenione, jednak **tylko 4 najlepiej ocenione zadania wejdą w skład Twojej ogólnej oceny**.

Wszystkie odpowiedzi należy odpowiednio uzasadnić. **Rozwiązania oddzielnych zadań powinny się znaleźć na osobnych kartkach**; oczywiście rozwiązanie jednego zadania może być zapisane na więcej niż jednej kartce.

Każda oddana kartka powinna być **podpisana imieniem i nazwiskiem**, a także opatrzona **numerem odpowiedniego zadania**.

Czas trwania egzaminu: 3 godziny

Powodzenia!

Analiza matematyczna

Zadanie 1. Określmy ciąg funkcyjny $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}$.

(a) Znaleźć granicę ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Rozstrzygnąć, czy zbieżność ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajna na $[0,\infty)$. Czy zbieżność jest jednostajna na $[0,1]$?

(b) Czy ciąg $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ (pochodnych funkcji f_n) jest zbieżny jednostajnie na $[0,2024]$?

(c) Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\left(\frac{2x}{y}\right) x \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y),$$

gdzie λ_2 oznacza dwuwymiarową miarę Lebesgue'a.

(d) Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0,y_0) = (1,1)$ równanie

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$$

wyznacza jednoznacznie funkcję $y(x)$ określoną na przedziale $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, która jest klasy C^2. Wyznaczyć $y'(1)$. Udowodnić, że funkcja y ma w $x=1$ ekstremum lokalne i rozstrzygnąć czy jest to minimum czy maksimum.

Funkcje analityczne

Zadanie 2. Ustalmy $r > 0$ oraz liczby zespolone $a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ spełniające $|a|,|b| < r$. Określmy transformację Möbiusa h wzorem

$$h(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

(a) Wykazać, że dla pewnego $t \in (0,r)$ istnieje funkcja holomorficzna $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > t\} \to \mathbb{C}$ spełniająca równanie $\exp(f(z)) = h(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, $|z| > t$.

(b) Załóżmy teraz, że a,b są liczbami rzeczywistymi spełniającymi $0 < b < a < r$. Oznaczmy $C(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$. Pokazać, że obrazem okręgu $C(0,r)$ przez homografię h jest pewien okrąg leżący w półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

(c) Oznaczmy przez $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ gałąź główną logarytmu określoną wzorem $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)$, gdzie $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi,\pi]$ jest argumentem głównym liczby z. Zdefiniujmy funkcję

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \operatorname{Log}\frac{z-2}{z-1}.$$

Wyznaczyć residuum $\operatorname{Res}(f,\infty)$ funkcji f w nieskończoności oraz obliczyć całkę

$$\int_{C(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

gdzie okrąg $C(0,r)$ jest dodatnio zorientowany.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadanie 3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Symbolem $\sigma(X+Y)$ oznaczamy σ-ciało generowane przez zmienną losową $X+Y$; symbol $\mathbb{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A.

(a) Wykazać, że dla każdego $A \in \sigma(X+Y)$ zachodzi równość $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$.

(b) Wyznaczyć wszystkie pary (X, Y), dla których prawdziwa jest równość $\mathbb{E}(X^2 \mid X+Y) = XY$ prawie na pewno.

(c) Załóżmy teraz dodatkowo, że X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, tj. rozkład o gęstości danej wzorem $g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Dla dowolnie ustalonego $y \in (0, \infty)$ obliczyć warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}(|X-Y| \mid Y = y).$$

(d) Niech $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie wykładniczym. Dla $n \in \mathbb{N}$ określmy zmienną losową Y_n wzorem

$$Y_n = n^{\frac{2025}{2024}} \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Rozstrzygnąć czy ciąg $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny według rozkładu, tj. czy istnieje zmienna losowa U taka, że $Y_n \xrightarrow{D} U$.

Geometria i algebra liniowa

Zadanie 4. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową na ciałem liczb zespolonych, zaś f pewnym endomorfizmem przestrzeni V. Zdefiniujemy operator $\Phi_f \colon \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ wzorem

$$\Phi_f(h) = f \circ h.$$

(a) W zależności od postaci Jordana endomorfizmu f znaleźć postać Jordana operatora Φ_f.

(b) Przypuśćmy, że endomorfizm f ma pierwiastek kwadratowy, to znaczy istnieje endomorfizm g taki, że $g^2 = f$. Sklasyfikować endomorfizmy, które mają pierwiastek kwadratowy. Podać konkretny przykład endomorfizmu, który nie ma pierwiastka kwadratowego.

(c) Sprawdzić, że w sytuacji z punktu (b), Φ_g jest pierwiastkiem kwadratowym Φ_f. Podać przykład operatora Φ_f i jego pierwiastka kwadratowego, który nie jest postaci Φ_g dla żadnego endomorfizmu $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

(d) Oznaczmy przez f^* hermitowskie sprzężenie f względem pewnego iloczynu hermitowskiego na V. Sprawdzić, że wzór $q(f, g) = \mathrm{tr}(f^* \cdot g)$ określa iloczyn hermitowski w przestrzeni $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Dla których endomorfizmów f operator Φ_f jest hermitowski względem formy q?

Algebra

Zadanie 5. Przypomnijmy, że $SL(2, \mathbb{C})$ to grupa macierzy o wyrazach zespolonych o wyznaczniku 1 z działaniem mnożenia macierzy. Wybieramy następujące trzy macierze:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zidentyfikować podgrupę $H \leqslant SL(2, \mathbb{C})$ generowaną przez I, J, K, to znaczy – ustalić jej rząd i relacje pomiędzy generatorami oraz opisać wszystkie jej podgrupy oraz obrazy homomorficzne.

(b) Niech G będzie grupą, której każda podgrupa jest normalna. Sklasyfikować grupy o tej własności rzędu 72.

(c) Czy każda podgrupa grupy $H \times \mathbb{Z}_4$ jest normalna?

(d) Niech $\mathbb{R}[x,y]$ będzie pierścieniem wielomianów dwóch zmiennych, zaś $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R})$ pierścieniem funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych na okręgu jednostkowym zadanym w $\mathbb{R}^2$ równaniem $x^2+y^2=1$. Znaleźć jądro homomorfizmu $\varphi\colon \mathbb{R}[x,y] \to \mathcal{C}(S^1)$ zdefiniowanego jako obcinanie funkcji na płaszczyźnie do funkcji na okręgu, tzn. $\varphi(f) = f_{|S^1}$. Czy φ jest epimorfizmem? Czy $\mathbb{R}[x,y]$ jest dziedziną? Czy $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R})$ jest dziedziną?

Topologia

Zadanie 6. Oznaczmy przez I odcinek $[0,1]$ wyposażony w topologię euklidesową, a przez $\mathbf{C} \subset [0,1]$ zbiór Cantora. Niech λ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue'a.

(a) Rozstrzygnąć czy istnieje nieskończona rodzina $\{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ parami rozłącznych przedziałów domkniętych zawartych w I o niepustych wnętrzach taka, że
$$\lambda\Big(I \setminus \bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha\Big) = 0.$$

(b) Pokazać, że nie istnieje nieskończona rodzina $\{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ parami rozłącznych przedziałów domkniętych o niepustych wnętrzach taka, że $\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha = I$.

(c) Niech $F \subset I$ będzie zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu. Dowieść, że istnieje homeomorfizm $\varphi\colon I \to I$ taki, że $\lambda(\varphi(F)) = 0$.

(d) Wiadomo, że istnieje ciągła surjekcja $f\colon \mathbf{C} \to I$. Używając funkcji f, skonstruować homeomorfizm $\varphi\colon I \to I$ spełniający warunek $\lambda(\varphi(\mathbf{C})) = \frac{1}{2}$.

Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 7. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Rozważmy układ równań różniczkowych

$$(\spadesuit)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) - x \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (x-1)y^\alpha \end{cases}$$

dla pewnej stałej $\alpha > 0$.

(a) Niech $f(t) < 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametrów $\alpha > 0$, $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$ rozwiązania układu ($\spadesuit$) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ są jednoznaczne?

(b) Niech $f(t) = 2$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Rozważmy rozwiązania układu ($\spadesuit$) z warunkiem początkowym $x(0) = 2$, $y(0) = 4$. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ są one określone dla wszystkich $t \in (0, +\infty)$?

(c) Dla funkcji stałej $f(t) \equiv a \in \mathbb{R}$ i $\alpha = 1$ znaleźć stany stacjonarne układu ($\spadesuit$) i zbadać ich lokalną stabilność.

(d) Niech f będzie funkcją okresową o okresie podstawowym T (czyli T jest najmniejszą liczbą rzeczywistą nieujemną, taką że $f(t) = f(t+T)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$).
   (i) Udowodnić, że istnieje dokładnie jedno takie $x_0 \in \mathbb{R}$, że rozwiązanie pierwszego równania układu ($\spadesuit$) z warunkiem początkowym x_0 jest funkcją o okresie T.
   (ii) Niech x^* będzie rozwiązaniem, o którym mowa w punkcie (i). Udowodnić, że średnia wartość funkcji x^* na dowolnym przedziale $[t, t+T]$ jest równa średniej wartości funkcji f na przedziale $[0,T]$, czyli
$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} x^*(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{d}s.$$

Analiza funkcjonalna

Zadanie 8. Niech S będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ złożoną z tych ciągów rzeczywistych $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, i wyposażoną w standardowe operacje dodawania i mnożenia przez skalary według współrzędnych. Symbolem c_0 oznaczamy klasyczną przestrzeń Banacha ciągów zbieżnych do zera z normą supremum. Rozważmy normę $\|\cdot\|_{\mathsf{S}}$ na przestrzeni S daną wzorem

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathsf{S}} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{N} x_k \right| \qquad \text{dla } \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathsf{S}.$$

(a) Pokazać, że $(\mathsf{S}, \|\cdot\|_{\mathsf{S}})$ jest przestrzenią Banacha.

(b) Znaleźć liniowy izomorfizm (tj. odwracalny operator liniowy i ograniczony) między przestrzeniami S i c_0. Odpowiedź należy uzasadnić, tj. pokazać, że podany operator istotnie jest liniowym izomorfizmem.

(c) Wykazać, że dla każdego funkcjonału $\varphi \in \mathsf{S}^*$ istnieje taki ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, że

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} x_k \Big) \quad \text{dla } \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathsf{S}.$$

(d) Załóżmy, że ciąg funkcjonałów $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{S}^*$ ma tę własność, że $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(\mathbf{x})| < \infty$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathsf{S}$. Dowieść, że istnieje taka stała $C > 0$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(\mathbf{x})| \leqslant C \|\mathbf{x}\|_{\mathsf{S}} \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \in \mathsf{S}.$$

Języki programowania

Zadanie 9. Zadanie składa się z czterech niezależnych punktów:

(1) Rozważmy funkcję w języku C:

```
int* fib(int n) {
    int tab[n];

    if (n <= 0) {
        return NULL;
    }

    tab[0] = 0;
    if (n > 1) {
        tab[1] = 1;
    }

    for (int i = 2; i < n; i++) {
        tab[i] = tab[i-1] + tab[i-2];
    }
    return tab;
}
```

Jakie widzisz problemy z tą funkcją? Jak je naprawić?

(2) Rozważmy następujący kod w C++:

```
struct TreeNode {
    int val;
    TreeNode* left;
    TreeNode* right;

    TreeNode(int x) : val(x), left(nullptr), right(nullptr) {}
};

void inorderTraversal(TreeNode* root) {
    inorderTraversal(root->left);
    std::cout << root->val << " ";
    inorderTraversal(root->right);
}

int main() {
    TreeNode* root = new TreeNode(1);
    root->left = new TreeNode(2);
    root->right = new TreeNode(3);
    root->left->left = new TreeNode(4);
    root->left->right = new TreeNode(5);

    inorderTraversal(root);

    return 0;
}
```

Jakie widzisz problemy z powyższym kodem? Jak je naprawić? Napisz równoważy kod nie używając rekurencji.

(3) Rozważ poniższy kod w Ocamlu:

```
let f g a b s =
  let rec h x acc =
    if x >= b then
      acc
    else
      let py = g x in
      let y = g (s x) in
      let ny = g (s (s x)) in
      if py < y && ny < y then
        h (s x) ((s x) :: acc)
      else
        h (s x) acc
  in
  h a []
```

Co robi funkcja `f`? Jaki ma typ ta funkcja?

(4) Napisz w Pythonie dekorator który liczy liczbę wywołań danej funkcji. Napisz fragment programu, który używa takiego dekoratora.

Matematyka dyskretna

Zadanie 10. *Uwaga.* We wszystkich poleceniach odpowiedź ma mieć postać zwartą.

(a) Na ile sposobów można podzielić pas $2 \times n$ na części będące prostokątami 2×1? (Tu, i dalej, części mogą się pokrywać wyłącznie brzegami.)

(b) Na ile sposobów można podzielić pas $2 \times n$ na części będące prostokątami 2×1 lub 2×2?

(c) Niech $a_{n,k}$ będzie liczbą podziałów prostokąta $2 \times n$ na części o wymiarach 2×1 i 2×2, w których dokładnie k części ma wymiary 2×2. Niech $A(x) = \sum_{n=2k}^{\infty} a_{n,k} x^n$. Podaj zwarty wzór na $A(x)$.

(d) Na ile sposobów można podzielić pas $2 \times n$ na części będące prostokątami 2×1 lub 2×2 lub kształtami $L = [0, 2] \times [0, 2] \setminus [0, 1) \times [0, 1)$?

Algorytmy i struktury danych

Zadanie 11. Dla $M \in \mathbb{N}$ i rodziny n zbiorów $S_1, \ldots, S_n \subseteq \{0, \ldots, M\}$, *przedziałem trafiającym* te zbiory, nazywamy dowolny przedział całkowitoliczbowy $I = \{a, a + 1, \ldots, b\}$ taki, że $I \cap S_i \neq \emptyset$ dla wszystkich i.

(a) Zaproponuj algorytm o złożoności $O(n)$ znajdujący najkrótszy przedział trafiający w przypadku, gdy każdy S_i jest przedziałem $S_i = \{a_i, \ldots, b_i\}$, zadanym przez końce a_i, b_i.

(b) Zaproponuj algorytm o złożoności $O(n)$ stwierdzający dla danego k oraz rodziny zbiorów 2-elementowych $\{S_i\}_{i=1,\ldots,n}$ czy istnieje przedział trafiający długości k. W tym punkcie zakładamy $M = O(n)$.

(c) Zaproponuj algorytm o złożoności $O(n)$ który, dla danej rodziny zbiorów 2-elementowych $\{S_i\}_{i=1,\ldots,n}$, znajduje dla każdego $k \in \{0, \ldots, M\}$ liczbę różnych przedziałów trafiających długości k. Tu także zakładamy $M = O(n)$.

(d) Zaproponuj algorytm o złożoności $O(n)$, który dla danej rodziny zbiorów 2-elementowych $\{S_i\}_{i=1,\ldots,n}$, znajduje łączną liczbę różnych przedziałów trafiających. Zakładamy $M = O(n^2)$.

Uwaga. Dla każdego z algorytmów uzasadnij poprawność i oszacuj złożoność czasową.

Logika i bazy danych

Zadanie 12. Podaj zdanie ϕ logiki pierwszego rzędu nad pewną sygnaturą Σ o następującej własności, lub udowodnij, że takie nie istnieje. We wszystkich zadaniach modele liczymy z dokładnością do izomorfizmu (dwa modele są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja między ich nośnikami, zachowująca interpretację każdego symbolu w Σ):

(a) zdanie mające dokładnie $n/2$ modeli mocy n, dla każdego $n > 0$ parzystego, i nie mające modeli mocy n dla n nieparzystego;

(b) zdanie mające dokładnie jeden model nieskończony;

(c) zdanie mające dokładnie jeden model skończony oraz nieskończenie wiele modeli nieskończonych;

(d) zdanie ϕ nad sygnaturą złożoną z jednego symbolu funkcyjnego f o arności 1, takie, że każdego $n > 0$ skończonego, jedynym modelem ϕ jest struktura o nośniku $\{0, \ldots, n - 1\}$, gdzie f jest interpretowane jako funkcja $i \mapsto (i + 1) \bmod n$.

Automaty i języki formalne

Zadanie 13. W tym zadaniu rozważamy słowa nad alfabetem $\Sigma = \{1, 2\}$. Niech S_n będzie językiem słów $w \in \Sigma^*$ sumujących się do n (np. $S_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\}$). Dla następujących języków określ czy są one regularne oraz czy są one bezkontekstowe. W przypadku jezyków regularnych podaj rząd wielkości najmniejszej liczby stanów automatu skończonego, który rozpoznaje dany język, w zależności od n (np. $\Theta(n^2)$ stanów), zarówno dla automatu deterministycznego, jak i niedeterministycznego.

(a) $S_n\Sigma^*$

(b) $\Sigma^* S_n$

(c) $\bigcup_{k \geqslant n} S_k S_k$

(d) $\bigcup_{k \geqslant n} S_k S_k S_k$

Teoria obliczeń i złożoność obliczeniowa

Zadanie 14. Problem pokrycia grafu 3-cyklami definiujemy następująco. Dla grafu skierowanego $G = (V, E)$ oraz liczby całkowitej L pytamy czy istnieje zbiór trójek S, $|S| \geqslant L$, taki, że każda trójka $t \in S$ jest cyklem w G i każdy wierzchołek z V należy do co najwyżej jednej trójki w S.

(a) Udowodnij, że problem pokrycia grafu 3-cyklami jest NP-zupełny.

(b) Udowodnij, że istnieje wielomianowy algorytm 3-aproksymacyjny dla problemu pokrycia grafu 3-cyklami.

(c) Wskaż wielomianowy algorytm aproksymacyjny o współczynniku aproksymacji lepszym niż 3 w przypadku gdy naszym celem jest pokrycie grafu cyklami o rozmiarach co najwyżej 3 oraz każda krawędź w grafie jest dwustronna (jeżeli istnieje krawędź z u do v to istnieje również krawędź z v do u).

(d) Udowodnij, że problem jest FPT (*fixed-parameter-tractable*) dla grafów spójnych dla parametru $(|E| - |V|)$.

Wskazówka. Rozważmy następujący problem trójwymiarowego dopasowania. Dane mamy zbiory X, Y i Z, zbiór T będący podzbiorem $X \times Y \times Z$ (innymi słowy, T składa się z trójek (x, y, z) takich, że $x \in X$, $y \in Y$ i $z \in Z$) oraz liczba całkowita L. Powiemy, że $M \subseteq T$ jest trójwymiarowym dopasowaniem, jeśli zachodzą następujące warunki: dla każdej pary różnych trójek $(x_1, y_1, z_1) \in M$ i $(x_2, y_2, z_2) \in M$ mamy $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ oraz $z_1 \neq z_2$. Pytamy, czy istnieje trójwymiarowe dopasowanie o rozmiarze co najmniej L. Ten problem jest NP-trudny.

Programowanie współbieżne i rozproszone, systemy komputerowe

Zadanie 15. Pewien system rozproszony przeprowadza symulację numeryczną układu o geometrii pierścienia. Procesy komunikują się używając następującego interfejsu: `send(do_kogo, komunikat)` oraz `komunikat = receive([od_kogo])` (gdy proces nie podaje wartości dla `od_kogo`, odbierany jest komunikat od dowolnego nadawcy). Komunikacja odbywa się synchronicznie, tzn. w semantyce spotkań, rendez-vous: `send` blokuje się do momentu odebrania komunikatu przez odbiorcę; a `receive` do momentu przesłania komunikatu przez nadawcę. Komunikacja i procesy są niezawodne.

Dla każdej pary procesów komunikaty odbierane są w kolejności wysłania. Gdy wielu nadawców wysyła komunikaty do tego samego odbiorcy, `receive` gwarantuje słabą uczciwość.

Rozwiąż następujące zadania. Dla każdego z rozwiązań określ klasę (typ) problemu.

(a) Załóż, że system poprawnie inicjuje lokalny stan symulowanego układu oraz zmienne wskazujące na poprzednika (`pid_prev`) i następnika (`pid_next`) każdego procesu tak, że procesy tworzą pierścień. Dostępne są lokalne funkcje `summarize` (podsumowująca stan w krótszą informację) oraz `evolve` (przekształcająca w nowy lokalny stan obecny lokalny stan oraz informacje o poprzedniku i następniku) . Udowodnij, że poniższy kod jest poprawny, lub pokaż kontrprzykład i popraw kod (nie musisz udowadniać poprawności swojej wersji).

```
process compute(int pid, int pid_prev, int pid_next) {
  State s = <initial_local_state>;
  for (int step = 0; step < K; step++) {
    Value x = summarize(s);
    send(pid_prev, x);
    Value x_prev = receive()
    send(pid_next, x);
    Value x_next = receive();
    s = evolve(s, x_prev, x_next);
  }
```

(b) Załóż teraz, że w systemie jest dużo potencjalnych pracowników, wykonujących kod jak poniżej (przyjmij, że `compute()` jest funkcją lokalną z kodem identycznym do procesu z poprzedniego podpunktu). Napisz kod procesu `Coordinator`, który łączy P ($P > 2$) procesów w pierścień.

```
process worker(int pid) {
  while (true) {
    rest();
    send(Coordinator, pid);
    pid_prev = receive();
    pid_next = receive();
    compute(pid, pid_prev, pid_next);
  }
}
```

(c) Przyjmij, że podczas obliczeń, raz na pewien czas, w celu zachowania migawki (snapshot) obliczeń, proces chce zapisać swój stan na *współdzielonym* urządzeniu wyjściowym. Migawka powinna być tworzona bezpośrednio po funkcji `evolve()`, gdy lokalna funkcja `bool takeSnapshot()` zwraca prawdę. Zapis na urządzeniu odbywa się za pomocą wywołania lokalnej funkcji `write(byte[])`. Ze względu na sporą wielkość stanu, funkcję tę wywoływać trzeba wielokrotnie: `for (part in s.parts()) write(part.asBytes())`. Rozszerz kod funkcji `compute` tak, by zapisywane na urządzeniu migawki pochodzące z różnych procesów nie przeplatały się.

Bioinformatyka

Zadanie 16.

(a) W oparciu o daną macierz odległości zbuduj drzewo gatunków A-E wykorzystując algorytm UPGMA. Oznacz długości wszystkich gałęzi na drzewie.

	A	B	C	D	E
A	0	15	30	20	100
B		0	25	35	5
C			0	10	40
D				0	125
E					0

(b) Wyznacz minimum jedno optymalne globalne przyrównanie (dopasowanie, alignment) sekwencji CTTAAG oraz CTAAT stosując następujący schemat punktacji: +2 dla dopasowania, -1 dla niedopasowania oraz -2 dla przerwy. Wykorzystaj algorytm programowania dynamicznego Needlemana-Wunscha. Zapisz:
- znalezione przyrównanie,
- macierz programowania dynamicznego,
- wartość punktacji uzyskanego przyrównania.

(c) Zaproponuj i krótko omów dwie metody, którymi można się posłużyć do oceny jakości analizy skupień wykonanej za pomocą algorytmu k-średnich.