

Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
nauki fizyczne – egzamin pisemny

Instrukcja obsługi. W rozwiązaniach przedstaw tok rozumowania prowadzący do wyniku. Końcowe wyniki obliczeń zapisz z dokładnością 3 lub 2 cyfr znaczących, po odpowiednim zaokrągleniu, np. $1,23456 \cdot 10^{-19} \approx 1,23 \cdot 10^{-19}$ lub $1,2 \cdot 10^{-19}$. W obliczeniach możesz użyć przybliżonych wartości stałych fizycznych podanych w poniższej tabeli.

prędkość światła w próżni	$c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	ładunek elementarny	$e \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
stała Coulomba	$k_e \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$	stała grawitacji	$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$
zredukowana stała Plancka	$\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	stała Plancka	$h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
stała Avogadra	$N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	masa protonu	$m_p \approx 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 938,3 \text{ MeV}/c^2$
stała Boltzmanna	$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	masa neutronu	$m_n \approx 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 939,6 \text{ MeV}/c^2$
rydberg	$Ry \approx 13,6 \text{ eV}$	masa elektronu	$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx 511 \text{ keV}/c^2$

Zadania 1-8 to zadania łatwiejsze. Oddaj lub prześlij rozwiązania tylko **czterech** z tych zadań. Za każde rozwiązanie możesz zdobyć do 6 punktów.

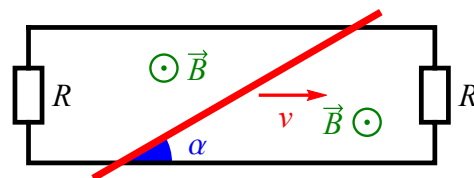
Zadania 9-14 to zadania trudniejsze. Oddaj lub prześlij rozwiązania tylko **dwóch** z tych zadań. Za każde rozwiązanie możesz zdobyć do 8 punktów.

Rozwiązanie każdego z zadań należy napisać na osobnej kartce.

ZADANIA ŁATWIEJSZE

Zadanie 1

Dwa równoległe, metalowe przewody odległe o d , są połączone na końcach opornikami o tym samym oporze R i znajdują się w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ prostopadłej do płaszczyzny przewodów. Przewody są dodatkowo połączone metalową poprzeczką tworzącą kąt $\alpha = 30^\circ$ z każdym z przewodów i poruszającą się z prędkością $\vec{v}$ w kierunku wyznaczonym przez przewody. Wyznacz natężenie prądu elektrycznego płynącego przez poprzeczkę.



Zadanie 2

Linie widma atomu deuteru są nieznacznie przesunięte w stosunku do analogicznych linii atomu wodoru. Jaką prędkość ruchu przypisze na podstawie badań widma spoczywającemu atomowi deuteru astronom błędnie przekonany, że to widmo atomu wodoru poruszającego się względem badacza w kierunku radialnym? Masa deuteronu (jądra deuteru) wynosi $m_d = 1876 \text{ MeV}/c^2$.

Zadanie 3

Cząstka o masie m poruszająca się w jednym wymiarze x ma w pewnej chwili funkcję falową $\psi(x) = Ae^{-\lambda|x|}$, gdzie A oraz λ są stałymi dodatnimi.

- Wyznacz stałą A .
- Wyznacz prawdopodobieństwo znalezienia tej cząstki w przedziale $-a < x < a$, gdzie a jest pewną stałą.

Zadanie 4

Kropła nieściśliwej cieczy została pobudzona do małych drgań polegających na zmianach kształtu tej kropki względem kształtu sferycznego. Częstotliwość f tych drgań zależy tylko od napięcia powierzchniowego cieczy γ , jej gęstości ρ oraz promienia kropki r . Podaj postać tej zależności z dokładnością do stałej multiplikatywnej.

Zadanie 5

W większości procedur medycyny nuklearnej wykorzystującej promieniowanie gamma stosuje się promieniotwórczy izotop technetu ^{99m}Tc , którego czas połowicznego zaniku wynosi $T_{1/2} = 6$ godzin. Po jakim czasie z początkowej próbki pozostanie $1/18$ tego izotopu?

Zadanie 6

Pacjentowi został podany lek, którego współczynnik dyfuzji w temperaturze ludzkiego ciała ($T = 37^\circ\text{C}$) wynosi $D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

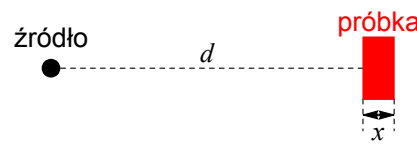
- Ile średnio czasu potrzeba, aby cząsteczka leku po przejściu przez błonę komórkową dotarła do środka kulistej komórki o promieniu $r = 1 \mu\text{m}$?
- Oblicz promień cząsteczki leku, zakładając, że ma ona kształt kulisty, i wiedząc, że lepkość cytoplazmy w temperaturze $T = 37^\circ\text{C}$ jest równa $\eta = 1,5 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Zadanie 7

W celu przeprowadzenia testu przeżywalności wykorzystano 200 komórek, które zostały wysiane na dwóch szalkach Petriego. Na jednej szalce znalazło się 100 komórek kontrolnych, które nie zostały poddane działaniu żadnego promieniowania. Na drugiej szalce znalazło się 100 komórek napromienionych dawką $D_0 = 2 \text{ Gy}$. Po dwutygodniowej inkubacji na szalce kontrolnej powstało 75 kolonii, a na szalce z napromienionymi komórkami – 20 kolonii. Zakładając, że krzywa przeżywalności opisana jest funkcją wykładniczą dawki, oblicz dawkę promieniowania D , dla której przeżycie komórek wynosi $\text{SF}=37\%$. Każda kolonia powstaje z pojedynczej komórki wysianej na szalce. Przeżycie komórek (SF) to stosunek liczby komórek, które przeżyły napromienianie, do liczby nienapromienionych komórek, które przeżyłyby ekspozycję na promieniowanie.

Zadanie 8

Punktowe źródło ^{57}Co o aktywności $A_0 = 100 \text{ MBq} = 10^8 \text{ s}^{-1}$ emituje kwanty promieniowania γ o energii $E_\gamma = 125 \text{ keV}$. Promieniowanie to pada na próbkę o grubości $x = 20 \mu\text{m}$, powierzchni $S = 1 \text{ cm}^2$ i gęstości równej gęstości wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, znajdującą się w odległości $d = 100 \text{ mm}$ od źródła. Między źródłem a próbką znajduje się powietrze o zaniedbywalnej gęstości i zaniedbywalnym współczynniku pochłaniania promieniowania γ . Współczynnik osłabienia promieniowania γ o energii $E_\gamma = 125 \text{ keV}$ w wodzie wynosi $\mu_{\text{en}} = 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$. Oblicz moc dawki źródła dla tej próbki, wiedząc, że dawka pochłonięta jest średnią energią, jaką traci promieniowanie, a pochłanianie ośrodek, przez który promieniowanie przechodzi, przypadająca na jednostkę masy tego ośrodka; moc wiąże się z dawką i czasem w znany fizykom sposób.



ZADANIA TRUDNIEJSZE

Zadanie 9

Z krawędzi wieży, na wysokości H nad ziemią, Galileusz stara się upuszczać pionowo ołowiane kulki, każda o masie m , tak aby jak najdokładniej trafić w wyznaczony punkt. Dysponuje najprecyzyjniejszą dostępną aparaturą. Na podstawie zasady nieoznaczoności Heisenberga oszacuj typową odległość od celu, w jakiej będą lądowały kulki Galileusza, jeśli żadne zewnętrzne zjawiska ani procesy fizyczne nie będą w stanie zakłócić ich lotu.

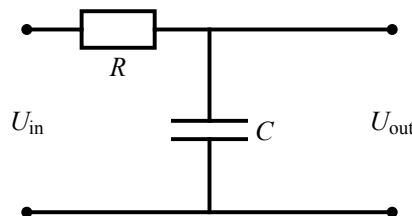
Zadanie 10

Motocyklistka porusza się po kołowym, asfaltowym torze o promieniu R . Będąc w chwili początkowej w spoczynku, motocyklistka nadaje swojej maszynie maksymalne przyspieszenie, przy którym motocykl nie traci jeszcze przyczepności do asfaltu. Jaki dystans przebędzie motocyklistka, zanim osiągnie maksymalną możliwą prędkość? Współczynnik tarcia kół motocykla o asfalt wynosi μ , masa motocyklistki jest równa m , a przyspieszenie grawitacyjne wynosi g .

Zadanie 11

Układ RC przedstawiony na rysunku obok składa się z opornika o oporze $R = 1 \text{ k}\Omega$ i kondensatora o pojemności $C = 0,4 \mu\text{F}$.

- Dla sinusoidalnie zmiennego napięcia o częstotliwości f i amplitudzie U_{in} podawanego na wejście układu, wyznacz amplitudę napięcia zmiennego na wyjściu U_{out} jako funkcję R , C i f .
- Dla podanych wartości R i C wyznacz częstotliwość graniczną f_g , dla której transmitancja $T = |U_{\text{out}}/U_{\text{in}}|$ jest równa $1/\sqrt{2}$.



Zadanie 12

Trzy jednakowe, nieoddziałujące cząstki o spinie $1/2$ znajdują się wewnątrz sześciangu o boku długości L i poruszają się swobodnie w tym obszarze. Określ energię stanu podstawowego tego układu.

Zadanie 13

Oddziaływanie dwóch rozróżnialnych cząstek o spinie $1/2$ jest opisywane hamiltonianem

$$\hat{H} = \lambda \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2,$$

gdzie λ jest stałą, zaś $\hat{S}_1$ i $\hat{S}_2$ są operatorami spinu odpowiednio pierwszej i drugiej cząstki. Wyznacz poziomy energetyczny tego układu i odpowiadające im stany.

Zadanie 14

Kulista cząsteczka o promieniu $R = 20 \mu\text{m}$ i gęstości $\rho = 1750 \text{ kg/m}^3$, początkowo spoczywająca na powierzchni naczynia z wodą o głębokości $h = 20 \text{ cm}$ i temperaturze $T = 20^\circ\text{C}$, opada pod wpływem pola grawitacyjnego o przyspieszeniu $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Po jakim czasie cząsteczka osiągnie dno naczynia? Gęstość i lepkość wody w temperaturze $T = 20^\circ\text{C}$ wynoszą, odpowiednio, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ i $\eta = 0,89 \text{ mPa} \cdot \text{s}$. Siła oporu działająca na kulę o promieniu r poruszającą się z prędkością v w cieczy o lepkości η ma postać $F_{\text{op}} = 6\pi\eta r v$.