

Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
nauki fizyczne – egzamin pisemny

Instrukcja obsługi. W rozwiązaniach przedstaw tok rozumowania prowadzący do wyniku. Końcowe wyniki obliczeń zapisz z dokładnością 3 lub 2 cyfr znaczących, po odpowiednim zaokrągleniu, np. $1,23456 \cdot 10^{-19} \approx 1,23 \cdot 10^{-19}$.

Zadania 1-8 to zadania łatwiejsze. Oddaj lub prześlij rozwiązania tylko **czterech** z tych zadań. Za każde rozwiązanie możesz zdobyć do 6 punktów.

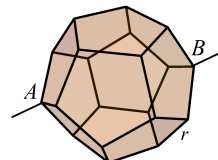
Zadania 9-14 to zadania trudniejsze. Oddaj lub prześlij rozwiązania tylko **dwóch** z tych zadań. Za każde rozwiązanie możesz zdobyć do 8 punktów.

Rozwiązanie każdego z zadań należy napisać na osobnej kartce.

ZADANIA ŁATWIEJSZE

Zadanie 1

Krawędzie dwunastościanu foremnego wykonane są z drutu oporowego. Opór każdej krawędzi jest równy r . Do przeciwległych wierzchołków A i B podłączono źródło prądu. Wyznaczyć opór zastępczy R_{AB} tego dwunastościanu.



Zadanie 2

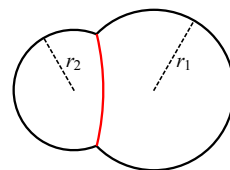
Nieważki poziomy pręt o długości $2a$ może się swobodnie obracać wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek. Na pręt nawleczone są dwie jednakowe małe kulki, każda o masie m , które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać sprężysto od odbojników umieszczonych na końcach pręta. Na początku umocowano kulki w odległościach $\frac{1}{2}a$ od osi obrotu, po czym cały układ rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 , a następnie oswobodzono kulki. (a) Po jakim torze będą poruszały się kulki? (b) Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót o 360° ?

Zadanie 3

Na powierzchni stołu stoi, przylegając do niej szczelnie, półsferyczny klosz. Do klosza tego, przez otwór w jego wierzchołku, wlewana jest woda. Gdy poziom wody dochodzi do otworu, woda unosi klosz i zaczyna wyciekać dołem spod klosza. Znaleźć masę M klosza, jeśli jego promień wynosi $R = 30$ cm.

Zadanie 4

Dwie połączone bańki mydlane mają kształt wycinków sfer o promieniach, odpowiednio, $r_1 = 4$ cm i $r_2 = 3$ cm. Błonna rozdzielająca te bańki również jest wycinkiem pewnej sfery. Jaki jest promień r_{12} tej sfery? Napięcie powierzchniowe wody z mydłem, z której wytworzone są te bańki jest równe $\sigma = 0,03$ N/m.



Zadanie 5

Fale dźwiękowe o dużych częstotliwościach (np. ultradźwięki) mogą w ośrodkach rozchodzić się w postaci wąskich wiązek. Rozważ wiązkę ultradźwięków, która biegnie w powietrzu i pada na taflę wody pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Określ, jaka część natężenia tej wiązki odbija się od taflę wody. Przyjmij, że wartość prędkości dźwięku w powietrzu jest równa $v_p = 340$ m/s, a wartość prędkości dźwięku w wodzie jest równa $v_w = 1450$ m/s.

Zadanie 6

Stany kwantowe $|A\rangle$ i $|B\rangle$ pewnego układu fizycznego są stanami własnymi hamiltonianu odpowiadającymi energiom, odpowiednio, $E_A = E$ oraz $E_B = 2E$. W chwili $t = 0$ układ został przygotowany w stanie

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|B\rangle$$

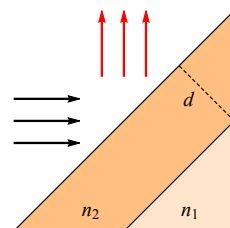
Wyznacz minimalny czas $t > 0$, dla którego stan $|\psi(t)\rangle$, opisujący układ w chwili t , jest ortogonalny do stanu $|\psi(0)\rangle$.

Zadanie 7

Stosunek częstotliwości fali dźwiękowej kolejnych półtonów skali muzycznej wynosi $2^{1/12} \approx 1,059$. Przyjmijmy, że odbieramy dźwięk jako czysty, jeśli różni się od przypisanej mu częstotliwości o nie więcej niż $1/8$ półtonu. Ile co najmniej musi trwać dźwięk o częstotliwości $\nu_1 = 880$ Hz śpiewany przez sopranistkę, a ile dźwięk o częstotliwości $\nu_2 = 110$ Hz śpiewany przez głos basowy, aby można było docenić czystość wykonania arii?

Zadanie 8

Na szklaną płytę o współczynniku załamania $n_1 = 1,5$ pokrytą cienką warstwą o współczynniku załamania $n_2 = 1,8$ pada pod kątem 45° wiązka światła białego. Jaka powinna być grubość d cienkiej warstwy, aby uzyskać maksymalny współczynnik odbicia dla światła czerwonego i jak najmniejszy dla światła w zakresie od niebieskiego do zielonego.



ZADANIA TRUDNIEJSZE

Zadanie 9

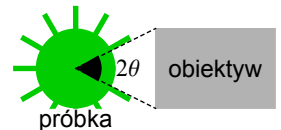
Promieniotwórczość protonowa to przemiana, w której jądro rozpada się, emitując proton. (a) Oblicz energię kinetyczną protonu oraz energię jądra odrzutu powstających w rozpadzie protonowym $^{151}_{71}\text{Lu}$ do stanu podstawowego $^{150}_{70}\text{Yb}$. (b) Jaki orbitalny moment pędu unosi emitowany proton? Deficyt masy $^{151}_{71}\text{Lu}$ wynosi $-30,108\text{ MeV}$, deficyt masy $^{150}_{70}\text{Yb}$ jest równy $-38,830\text{ MeV}$, deficyt masy ^1_1H wynosi $7,289\text{ MeV}$. Spin i parzystość $^{151}_{71}\text{Lu}$ są równe $\frac{11}{2}^-$. Stan podstawowy jądra parzysto-parzystego ma spin i parzystość wynoszące 0^+ .

Zadanie 10

W celu pomiaru polaryzacji wiązki elektronów w akceleratorze LEP w CERN-ie dokonano rozpraszania Comptona do tyłu wiązki fotonów z lasera Nd:YAG o długości fali $\lambda = 532\text{ nm}$ na wiązce elektronów o energii $E = 45\text{ GeV}$. Oblicz energię rozproszonych do tyłu fotonów. W obliczeniach przyjmij $\hbar c = 197\text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

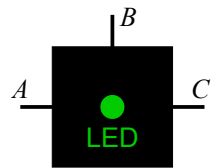
Zadanie 11

Światło laserowe o długości fali 485 nm jest wykorzystywane do wzbudzania fluorescencji o długości fali 497 nm w próbce umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej immersyjnego olejowego obiektywu o aperturze numerycznej $1,4$. Fluorescencja jest rejestrowana przez detektor pojedynczych fotonów. Jeśli na detektor padnie zbyt wiele fotonów w zbyt krótkim czasie, detektor wyłączy się. Wyznacz maksymalną moc światła laserowego mierzona przed obiektywem, która nie doprowadzi do wyłączenia detektora w powyższej konfiguracji eksperymentalnej. Przyjmij, że detektor może bezpiecznie mierzyć do 10^7 fotonów na sekundę, prawdopodobieństwo detekcji fotonu w płaszczyźnie detektora wynosi $0,25$, prawdopodobieństwo zaabsorbowania fotonu przez cząsteczkę fluoroforu przyjmij równe 10^{-6} , zaś prawdopodobieństwo emisji fotonu po absorpcji wynosi $0,5$. Prawdopodobieństwo absorpcji jest stałe i niezależne od mocy światła laserowego, a próbka świeci izotropowo. Współczynnik załamania oleju jest równy $n = 1,518$. Dla przyrządów optycznych apertura numeryczna NA dana jest wzorem $NA = n \sin \theta$, gdzie θ jest połową maksymalnego kąta, z jakiego może padać światło na przyrząd, a n to współczynnik załamania ośrodka, w którym znajduje się przyrząd.



Zadanie 12

Dane są następujące elementy: czarna skrzynka z widoczną zieloną diodą LED i trzema stykami elektrycznymi oznaczonymi jako A , B i C ; zepsuty multimetr, w którym nie działa funkcja omomierza, jednak zarówno woltomierz, jak i amperomierz działają poprawnie; bateria o znanej sile elektromotorycznej oraz dowolna liczba przewodów. Oprócz diody LED czarna skrzynka zawiera dwa oporniki, z których jeden ma trzykrotnie większy opór niż drugi. Po podłączeniu biegunów baterii do każdej z par styków zaobserwowano następujące zjawiska opisane w poniższej tabeli.

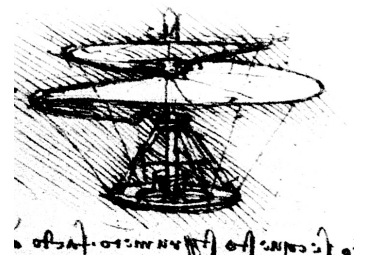


biegun +	biegun -	stan diody	biegun +	biegun -	stan diody
A	B	nie świeci	A	C	nie świeci
B	A	świeci bardzo jasno	B	C	wyказuje niewielkie świecenie
C	A	nie świeci	C	B	nie świeci

Zaproponuj sposób określenia układu elementów wewnątrz skrzynki, wiedząc, że przy żadnym ze styków nie ma oporników połączonych równolegle oraz że żaden styk nie jest odizolowany od reszty układu. Skrzynki nie wolno otwierać, uszkadzać, ani w jakikolwiek sposób niszczyć.

Zadanie 13

Wśród rysunków Leonarda da Vinci znajduje się projekt helikoptera napędzanego pracą ludzkich mięśni. Przyjmij, że średnica wirnika takiego helikoptera jest równa $d = 8\text{ m}$, masa helikoptera wraz z pilotem to $m = 80\text{ kg}$. Czy helikopter ten może się wznieść w powietrze, jeśli przy długotrwałym wysiłku pilot może rozwinąć moc $P = 150\text{ W}$? Załóż, że gęstość powietrza jest równa $\rho = 1,3\text{ kg/m}^3$.



Zadanie 14

Pręt o masie M i długości L znajduje się w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g . Pręt ten jest zawieszony na końcach na dwóch sprężynach o jednakowych długościach swobodnych i takich samych stałych sprężystości równych k . Sprężyny są stale pionowe, tak że ruch pręta odbywa się w płaszczyźnie. Pręt wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi. Wyznacz częstotści i mody normalne tych drgań.